

SIMULAZIONE ZANICHELLI 2024

DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.**Problema 1**

Considera la funzione

$$f_k(x) = \frac{x(2x + k)}{x^2 + k},$$

dove k è un parametro reale non nullo, e indica con γ_k il suo grafico.

1. Determina il dominio della funzione al variare di k e verifica che tutte le curve passano per il punto O , origine del sistema di riferimento, e che in tale punto hanno tutte la stessa retta tangente t .
2. Dimostra che γ_k e t per $k \neq -4 \wedge k \neq 0$ si intersecano in due punti fissi.

Fissato ora $k = 4$, poni $f(x) = f_4(x)$ e indica con γ il suo grafico.

3. Studia la funzione $f(x)$ e traccia il grafico γ .
4. Determina l'area della regione finita di piano R_1 delimitata da γ , dal suo asintoto orizzontale e dall'asse delle ordinate, e l'area della regione finita di piano R_2 delimitata da γ e dall'asse delle ascisse. Qual è la regione con area maggiore?

Problema 2

Considera la funzione

$$f(x) = \frac{a \ln^2 x + b}{x},$$

con a e b parametri reali non nulli.

1. Determina le condizioni su a e b in modo che la funzione $f(x)$ non ammetta punti stazionari. Dimostra poi che tutte le rette tangenti al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa $x = 1$ passano per uno stesso punto A sull'asse x di cui si chiedono le coordinate.
2. Trova i valori di a e b in modo che il punto $F(1; -1)$ sia un flesso per la funzione. Verificato che si ottiene $a = 1$ e $b = -1$, studia la funzione corrispondente, in particolare individuando asintoti, massimi, minimi ed eventuali altri flessi, e traccia il suo grafico.

D'ora in avanti considera fissati i valori $a = 1$ e $b = -1$ e la funzione $f(x)$ corrispondente.

3. Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x)$, la sua tangente inflessionale in F e la retta di equazione $x = e$.

4. Stabilisci se la funzione $y = |f(x)|$ soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[1; e^2]$. Utilizza poi il grafico di $y = |f(x)|$ per discutere il numero delle soluzioni dell'equazione $|f(x)| = k$ nell'intervallo $[1; e^2]$ al variare del parametro reale k .

QUESITI

1. Dato il quadrato $ABCD$ di lato l , siano M e N i punti medi dei lati consecutivi BC e CD rispettivamente. Traccia i segmenti AM , BN e la diagonale AC . Indicati con H il punto di intersezione tra AM e BN e con K il punto di intersezione tra BN e AC , dimostra che:

a. AM e BN sono perpendicolari;

b. $\overline{HK} = \frac{2\sqrt{5}}{15}l$.

2. Nel riferimento cartesiano $Oxyz$ è data la superficie sferica di centro $O(0; 0; 0)$ e raggio 1. Ricava l'equazione del piano α tangente alla superficie sferica nel suo punto $P\left(\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$. Detti A , B e C i punti in cui α interseca rispettivamente gli assi x , y e z , determina l'area del triangolo ABC .

3. Andrea va a scuola ogni giorno con lo stesso autobus, dal lunedì al venerdì. Da una lunga serie di osservazioni ha potuto stabilire che la probabilità p di trovare un posto libero a sedere è distribuita nel corso della settimana come indicato in tabella.

Giorno	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì
Probabilità p	10%	20%	30%	20%	10%

- a. Qual è la probabilità p_1 che nel corso della settimana Andrea possa sedersi sull'autobus almeno una volta?
- b. Sapendo che nell'ultima settimana Andrea ha trovato posto a sedere una sola volta, qual è la probabilità p_2 che questo si sia verificato di giovedì?
4. Dimostra che il volume massimo di una piramide retta a base quadrata inscritta in una sfera è minore di $\frac{1}{5}$ del volume della sfera.

5. Date le funzioni

$$f(x) = \frac{a - 2x}{x - 3} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{b - 2x}{x + 2},$$

ricava i valori di a e b per i quali i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si intersecano in un punto P di ascissa $x = 2$ e hanno in tale punto rette tangenti tra loro perpendicolari. Verificato che esistono due coppie di funzioni $f_1(x), g_1(x)$ e $f_2(x), g_2(x)$ che soddisfano le richieste, mostra che le due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si corrispondono in una simmetria assiale di asse $y = -2$, così come $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

6. Determina il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che valga:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + ax^3}{2x(1 - \cos x)} = \frac{17}{6}.$$

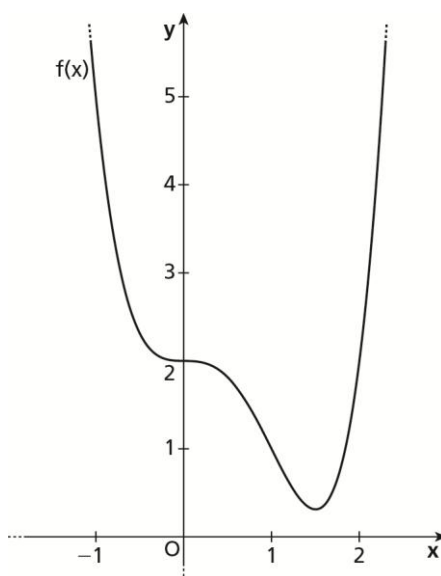
7. Data una generica funzione polinomiale di terzo grado

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

dimostra che le rette tangenti al grafico in punti con ascissa simmetrica rispetto al punto di flesso x_F sono parallele tra loro.

Considera la funzione di equazione $y = -x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ e scrivi le equazioni delle rette tangenti al suo grafico γ nei punti A e B , dove A è il punto di γ di ascissa -1 e B è il suo simmetrico rispetto al flesso.

8. In figura è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$.



Trova le tangenti inflessionali di γ , poi verifica che le aree delle due regioni di piano delimitate da γ e da ciascuna delle tangenti sono uguali.